Die Reziprozitätsformel für Gaußsche Summen in reell quadratischen Zahlkörpern

---

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der Hohen Philosophischen Fakultät

der Schlesischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Breslau

vorgelegt von

Wolfgang Cramer

aus Hamburg

Promotion: 4. Mai 1932

Universitätsverlag von Robert Noske in Borna-Leipzig

1932

Referent: Professor Dr. Rademacher
Korreferent: Professor Dr. Radon

Examen rigorosum: 29. April 1931

Gedruckt mit Genehmigung der Hohen Philosophischen Fakultät
der Schlesischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Breslau

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Einleitung.

Gaußsche Summen in beliebigen algebraischen Zahlkörpern sind zuerst von Herrn Hecke eingeführt worden[1]). Herr Hecke hat auch eine Reziprozitätsformel entwickelt, deren Beweis sich auf seine für allgemeine algebraische Zahlkörper definierten Thetafunktionen stützt. Auf einem anderen Wege hat Herr L. I. Mordell[2]) im quadratischen Zahlkörper diese Reziprozitätsformel erneut bewiesen, und zwar benutzt er im wesentlichen nur den Cauchyschen Integralsatz. Diese Methode stellt eine Übertragung dar eines von Kronecker im rationalen Körper durchgeführten Beweises. Im rationalen Körper sind noch mehrere andere Beweise bekannt, unter anderen einer, der unmittelbar eine Fourierentwicklung ansetzt. Auch im Heckeschen Beweise spielt die Theorie der Fourierreihen, von mehreren Variablen allerdings, die hier auf seine Thetafunktionen angewandt eine Reziprozitätsbeziehung liefert, eine entscheidende Rolle. Diese Heckeschen Thetafunktionen sind samt allen partiellen Ableitungen stetige und periodische Funktionen der Periode 1 von n Variablen. Die in dem unter [3]) zitierten Beweise im rationalen Zahlkörper angesetzte Funktion hat diese Eigenschaft nicht. Man benutzt dort nämlich:

$$f(x) = \sum_{k \bmod n} e^{2\pi i \frac{(x+k)^2}{n}}$$

---

[1]) Hecke, Theorie der algebraischen Zahlen, Leipzig 1923.

[2]) Proc. of the London Mathem. Society Ser. 2 Vol. 20, 4.

[3]) Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie Bd. I 4. Teil Kap. 6.

Es gilt zwar hier $f(0) = f(1) = f(l)$ für ganz rationales l, aber nicht $f(x+1) = f(x)$ für beliebige x. Die Funktion $f(x)$ bleibt also wohl nach periodischer Ergänzung über das Grundintervall $0 \leqq x \leqq 1$ stetig, die Ableitungen weisen aber an den Stellen $x = l$ (l ganz rational) Sprünge auf. Doch kann man $f(x)$ trotzdem in eine absolut und gleichmäßig konvergente Fourierreihe entwickeln; denn $f(x)$ ist im Grundintervall zweimal stetig differenzierbar, und es gilt $f(0) = f(1)$.

Nun kann man sich in der Tat in beliebigen algebraischen Zahlkörpern eine direkt verallgemeinerte Funktion $f(x_1, \ldots x_n)$ verschaffen. Auch jetzt gilt $f(0, \ldots 0) = f(l_1, \ldots l_n)$ mit ganzen rationalen l_k. Doch werden nicht nur die partiellen Ableitungen nach periodischer Ergänzung der Funktion über den Grundbereich $0 \leqq x_k \leqq 1$ hinaus an dessen Rändern unstetig, sondern die Funktion selbst, ein Verhalten, welches jetzt die Ungleichmäßigkeit der Konvergenz der Fourierreihe nach sich zieht. Man kann sich jedoch eine Funktion $F(x_1, \ldots . x_n)$ verschaffen, deren Fourierreihe absolut und gleichmäßig konvergiert. Man nimmt dabei allerdings eine gewisse Summationsvorschrift mit in Kauf, wie sich im Laufe der Rechnung herausstellt, die die Auswertung der Integrale erschwert. Um uns die Rechnung nicht zu erschweren, beschränken wir uns hier auf den Fall $n = 2$ und reeller Erzeugender. Doch dürfte das hier befolgte Verfahren auch für beliebige totalreelle Zahlkörper zum Ziel führen.

---

1. Die Gaußsche Summe und die zu ihr gehörige Fundamentalfunktion.

Es sei also $\mathfrak{R}$ ein reell-quadratischer Zahlkörper, $\mathfrak{d}$ die Differente, d die Diskriminante, ω eine feste Körperzahl und $\omega\mathfrak{d} = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$, $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = 1$, dann werde nach Herrn Hecke in $\mathfrak{R}$ eine Gaußsche Summe zum Nenner $\mathfrak{a}$ durch den Ausdruck definiert:

$$C(\omega) = \sum_{\mu \bmod \mathfrak{a}} e^{2\pi i S(\mu^2 \omega)} \tag{1.1}$$

worin μ ein vollständiges Restsystem mod. $\mathfrak{a}$ durchläuft und $S(\alpha)$ den Ausdruck $\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}$ bedeutet. $C(\omega)$ hängt von der Wahl des Restsystems nicht ab. Sei nämlich

$$\mu_1 \equiv \mu_2 \bmod \mathfrak{a}, \quad \text{dann gilt auch} \quad \mu_1^2 \equiv \mu_2^2 \bmod \mathfrak{a}.$$

Daher ist $(\mu_1^2 - \mu_2^2)\omega\mathfrak{d}$ ein ganzes Ideal. Daraus folgt: $e^{2\pi i S(\mu_1^2 \omega)} = e^{2\pi i S(\mu_2^2 \omega)}$. $C(\omega)$ ist also eine Funktion von ω allein.

Ist nun ω_1, ω_2 eine Basis von $\mathfrak{R}$, dann führen wir eine spezielle Basis von $\mathfrak{a}$ in der Gestalt ein:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= a_{11}\,\omega_1 \\ a_2 &= a_{21}\,\omega_1 + a_{22}\,\omega_2 \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

Hierin ist a_{kk} die kleinste positive Zahl derart, daß eine Zahl von der Form a_k in $\mathfrak{a}$ liegt. Dann ist bekanntlich (a_1, a_2) eine Basis von $\mathfrak{a}$ und $N(\mathfrak{a}) = \prod_1^2 a_{kk}$. Ferner stellen die Zahlen $\sum_{k=1}^{2} x_k \omega_k$

dann ein vollständiges Restsystem mod. $\mathfrak{a}$ dar, wenn die x_k ganz rational und der Bedingung $0 \leqq x_k \leqq a_{kk} - 1$ gemäß gewählt werden. Das sind nämlich gerade $N(\mathfrak{a})$ Zahlen, und sie sind, wie aus der Minimaleigenschaft der a_{kk} sofort hervorgeht, auch alle mod. $\mathfrak{a}$ inkongruent. Damit können wir $C(\omega)$ in die Gestalt bringen:

$$C(\omega) = \sum_{x_1=0}^{a_{11}-1} \sum_{x_2=0}^{a_{22}-1} e^{2\pi i \sum_{q=1}^{2} \left(\sum_{k=1}^{2} \omega_k^{(q)} x_k \right)^2 \omega^{(q)}} \tag{1.3}$$

Nunmehr betrachten wir folgende Funktion der reellen Variablen t_1, t_2:

$$f(t_1, t_2) = \sum_{x_1=0}^{a_{11}-1} \sum_{x_2=0}^{a_{22}-1} e^{2\pi i \sum_{q} \left(\sum_{k} (x_k + t_k) \omega_k^{(q)} \right)^2 \omega^{(q)}} \tag{1.4}$$

Für ganze rationale $t_k = l_k$ stellt $\sum_1^2 t_k \omega_k$ eine ganze Körperzahl dar. Dann durchläuft aber mit μ auch $\mu + \sum_1^2 t_k \omega_k$ ein vollständiges Restsystem mod. $\mathfrak{a}$. Da aber $C(\omega)$ von der Wahl des Restsystems nicht abhing, gilt: $f(s_1, s_2) = f(r_1, r_2)$ für ganze rationale s_k und r_k. Die Funktion $f(t_1, t_2)$ hat also die Eigenschaft, an allen ganzzahligen Gitterpunkten der Ebene den Wert $C(\omega)$ anzunehmen. Es gilt aber nicht $f(t_1, t_2) = f(t_1 + 1, t_2 + 1)$ für beliebige t_1, t_2 und auch nicht $f(0, t_2) = f(1, t_2)$ oder $f(t_1, 0) = f(t_1, 1)$, es sei denn für die Gitterpunkte. Legt man nun $f(t_1, t_2)$ etwa im Grundintervall $0 \leqq t_1 \leqq 1$, $0 \leqq t_2 \leqq 1$ gemäß der Definition fest und ergänzt diese Definition für die ganze Ebene durch die Festsetzung

$$f(t_1, t_2) = f(t_1 + 1, t_2) \qquad f(t_1, t_2) = f(t_1, t_2 + 1),$$

so erhält man eine an den Rändern des Grundbereichs mit Ausschluß der Gitterpunkte selbst unstetige Funktion. Wir legen nunmehr allgemeiner einen Bereich $l_k \leqq t_k \leqq l_k + 1$ zugrunde (l_k ganz rational) und definieren in ihm eine neue Funktion $F(t_1, t_2)$ vermöge der Festsetzung:

$$F(t_1, t_2) = \sum_{a_1=0}^{1} \sum_{a_2=0}^{1} f\{(2l_1+1)a_1 - t_1(2a_1-1), (2l_2+1)a_2 - t_2(2a_2-1)\}$$
$$l_k \leqq t_k \leqq l_k + 1 \qquad (1.5)$$

Die in der Summe stehende Funktion ist aus dem Ausdruck (1.4) zu entnehmen für $t_k = (2l_k+1)a_k - t_k(2a_k-1)$ gesetzt. Jetzt gilt aber:

$$F(t_1, l_2) = F(t_1, l_2+1) \quad \text{und} \quad F(l_1, t_2) = F(l_1+1, t_2),$$

weil sich dann die Summanden, aus denen $F(t_1, t_2)$ besteht, nur untereinander vertauschen. Setzen wir noch $F(t_1, t_2)$ in die ganze Ebene fort durch die Festsetzung

$$F(t_1, t_2) = F(t_1+1, t_2) \quad \text{und} \quad F(t_1, t_2) = F(t_1, t_2+1),$$

so wird $F(t_1, t_2)$ eine periodische Funktion der Periode 1 in jeder der beiden Variablen und bleibt auch an den Rändern des Grundbereichs stetig. In seinem Innern sind auch alle partiellen Ableitungen stetig, an den Rändern weisen diese Sprünge auf. Aus (1.5), (1.4) und (1.3) folgt nun sofort:

$$F(l_1, l_2) = F(l_1+1, l_2+1) = 4C(\omega) \qquad (1.6)$$

2. Darstellung der Gaußschen Summe durch eine Fourierreihe.

Wir zeigen nunmehr, daß die Funktion $F(t_1, t_2)$ in eine absolut und gleichmäßig konvergente Fourierreihe entwickelbar ist. Dazu beweisen wir den Hilfssatz:

Eine im Bereich $0 \leqq t_k \leqq 1$ stetige mit stetigen partiellen Ableitungen zweiter Ordnung versehene Funktion $\varphi(t_1, t_2)$, die ferner die Eigenschaft hat $\varphi(t_1, 0) = \varphi(t_1, 1)$, $\varphi(0, t_2) = \varphi(1, t_2)$, ist dort in eine absolut und gleichmäßig konvergente Fourierreihe entwickelbar, d. h. es gilt:

$$\varphi(t_1, t_2) = \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{+\infty} a(m_1, m_2)\, e^{-2\pi i \sum_1^2 m_k t_k}$$

mit

$$a(m_1, m_2) = \int_0^1 \int_0^1 e^{2\pi i \sum m_k t_k}\, \varphi(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2 \qquad (2.1)$$

Beweis:

Zunächst zeigen wir, daß die Fourierreihe in (2. 1) absolut und gleichmäßig konvergiert. Das ist der Fall, wenn $\sum_{m_1}\sum_{m_2}|a(m_1, m_2)|$ konvergiert. Nun ist die Funktion $\varphi(t_1, t_2)$ der Variablen t_2 eine in t_2 stetige mit stetigen Ableitungen erster und zweiter Ordnung versehene Funktion im Intervall $0 \leqq t_2 \leqq 1$ mit der Eigenschaft $\varphi(t_1, 0) = \varphi(t_1, 1)$. Es gilt also für den $m_2$ten Fourierkoeffizienten von $\varphi(t_1, t_2)$ nach einem bekannten Satz $|a_{m_2}| < \frac{C}{m_2^2 + 1}$, worin C eine nur von $\varphi(t_1, t_2)$ abhängende Konstante ist. Die Funktion $a_{m_2}(t_1) \cdot (m_2^2 + 1)$ hat aber hinsichtlich der Variablen t_1 dieselbe Eigenschaft wie $\varphi(t_1, t_2)$ hinsichtlich der Variablen t_2. Also gilt für ihren $m_1$ten Fourierkoeffizienten

$$|a_{m_1}| < \frac{C}{m_1^2 + 1}$$

Daraus folgt:

$$|a(m_1, m_2)| < \frac{C}{(m_1^2 + 1)(m_2^2 + 1)}$$

und schließlich

$$\sum_{m_1}\sum_{m_2}|a(m_1, m_2)| < C^*$$

Die beiden stetigen Funktionen $\varphi(t_1, t_2)$ und

$$\Phi(t_1, t_2) = \sum_{m_1}\sum_{m_2} a(m_1, m_2)\, e^{-2\pi i \sum_1^2 m_k t_k}$$

haben nun dieselben Fourierkoeffizienten, d. h. es gilt

$$\int_0^1\int_0^1 e^{2\pi i \sum_k m_k t_k} \{\Phi(t_1, t_2) - \varphi(t_1, t_2)\}\, dt_1\, dt_2 = 0$$

für alle Systeme (m_1, m_2), und daraus folgt dann

$$\Phi(t_1, t_2) - \varphi(t_1, t_2) = 0$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Nun hat die Funktion $F(t_1, t_2)$ aus (1.5) die in dem Hilfssatz verlangten Eigenschaften im Bereich $l_k \leqq t_k \leqq l_k + 1$.

Wir finden daher wegen (1.6)

$$\left.\begin{aligned} 4C(\omega) = F(l_1, l_2) &= \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{+\infty} a(m_1, m_2) \\ \text{mit} \\ a(m_1, m_2) &= \int_{l_1}^{l_1+1} \int_{l_2}^{l_2+1} e^{2\pi i \sum_k m_k t_k} F(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2 \end{aligned}\right\} \quad (2.2)$$

Setzen wir noch in (1.5)

$$\begin{aligned} &f(t_1, t_2; a_1, a_2) \\ &= f\{(2l_1+1)a_1 - t_1(2a_1 - 1),\ (2l_2+1)a_2 - t_2(2a_2 - 1)\}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

so wird

$$a(m_1, m_2) = \sum_{a_1=0}^{1} \sum_{a_2=0}^{1} \int_{l_1}^{l_1+1} \int_{l_2}^{l_2+1} e^{2\pi i \sum_k m_k t_k} f(t_1, t_2; a_1, a_2)\, dt_1\, dt_2$$

oder schließlich

$$\left.\begin{aligned} F(l_1, l_2) &= \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{+\infty} \sum_{a_1=0}^{1} \sum_{a_2=0}^{1} H(m_1, m_2; a_1, a_2) \\ \text{mit} \\ H(m_1, m_2; a_1, a_2) &= \int_{l_1}^{l_1+1} \int_{l_2}^{l_2+1} e^{2\pi i \sum_k m_k t_k} f(t_1, t_2; a_1, a_2)\, dt_1\, dt_2 \end{aligned}\right\} \quad (2.4)$$

Es werde hier ausdrücklich bemerkt, daß in (2.4) die Summation über die a_i mit der Summation über die m_k nicht vertauschbar ist. Nach erfolgter Summation über die a_i darf allerdings über die m_k in beliebiger Anordnung summiert werden. Führen wir noch in (2.4) in dem Integral die neuen Variablen $t_k' = (2l_k + 1)a_k - t_k(2a_k - 1)$ ein und schreiben statt t_k' wieder t_k, so erhalten wir

$$\begin{aligned} H(m_1, m_2; a_1, a_2) &= \int_{l_1}^{l_1+1} \int_{l_2}^{l_2+1} e^{2\pi i \sum_k m_k b_k t_k} f(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2 \\ &\qquad \text{mit } b_k = \begin{cases} +1 \text{ für } a_k = 0 \\ -1 \quad ,, \quad a_k = +1 \end{cases} \\ &= J(m_1, m_2; b_1, b_2) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Hier wurde benutzt, daß $e^{2\pi i r} = 1$ ist für ganze rationale r, und die Identität:

$$\int_a^b \psi(x)\,dx = -\int_b^a \psi(a+b-x)\,dx = \int_a^b \psi(a+b-x)\,dx$$

Wir haben nunmehr für $F(l_1, l_2)$ den Ausdruck:

$$F(l_1, l_2) = 4\,C(\omega) = \sum_{m_1} \sum_{m_2} \sum_{b_1=\frac{-1}{+1}} \sum_{b_2=\frac{-1}{+1}} J(m_1, m_2; b_1, b_2) \tag{2.6}$$

mit $J(m_1, m_2; b_1, b_2)$ aus (2.5).

Setzen wir in $J(m_1, m_2; b_1, b_2)$ den Wert von $f(t_1, t_2)$ aus (1.4) ein und ziehen die Summation über die x_k vor das Integral, so wird:

$$J(m_1, m_2; b_1, b_2)$$
$$= \sum_{x_1=0}^{a_{11}-1} \sum_{x_2=0}^{a_{22}-1} \int_{l_1}^{l_1+1} \int_{l_2}^{l_2+1} e^{2\pi i \left\{ \sum_k m_k b_k t_k + \sum_q \left(\sum_k (x_k + t_k)\, \omega_k^{(q)} \right)^2 \omega^{(q)} \right\}} dt_1\, dt_2$$

Durch die Substitution $x_k + t_k = t_k'$ vereinigen sich nun die Integrale, und man erhält wegen $e^{-2\pi i \sum_k m_k b_k x_k} = 1$

$$\left.\begin{aligned} &J(m_1, m_1; b_1, b_2) \\ &= \int_{l_1}^{l_1+a_{11}} \int_{l_2}^{l_2+a_{22}} e^{2\pi i \left\{ \sum_k m_k b_k t_k + \sum_q \left(\sum_k t_k\, \omega_k^{(q)} \right)^2 \omega^{(q)} \right\}} dt_1\, dt_2 \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

Der Ausdruck $J(m_1, m_2; b_1, b_2)$ hängt noch von dem System (l_1, l_2) ab, aber die Summe in (2.6) nicht. Daraus folgt:

$$\sum_{\substack{l_1 = k_1 a_{11} \\ k_1 = 0, \cdots, \frac{N(2\mathfrak{a})}{a_{11}} - 1}} \sum_{\substack{l_2 = k_2 a_{22} \\ k_2 = 0, \cdots, \frac{N(2\mathfrak{a})}{a_{22}} - 1}} F(l_1, l_2) = \frac{\{N(2\mathfrak{a})\}^2}{\prod_1^2 a_{kk}}\, 4\,C(\omega) = \frac{\{N(2\mathfrak{a})\}^2}{N(\mathfrak{a})}\, 4\,C(\omega) \tag{2.8}$$

und also wegen (2.6):

$$\frac{\{N(2\mathfrak{a})\}^2}{N(\mathfrak{a})} 4C(\omega) = \sum_{m_1}\sum_{m_2}\Big\{\sum_{b_1}\sum_{b_2}\sum_{l_1}\sum_{l_2} J(m_1, m_2; b_1, b_2; l_1, l_2)\Big\}$$

mit $J(m_1, m_2; b_1, b_2; l_1, l_2) = J(m_1, m_2; b_1, b_2)$ aus (2. 7) oder

$$\frac{\{N(2\mathfrak{a})\}^2}{N(\mathfrak{a})} 4C(\omega) = \sum_{m_1}\sum_{m_2}\Big\{\sum_{b_1}\sum_{b_2}\Big[\sum_{l_1}\sum_{l_2} J(m_1, m_2; b_1, b_2; l_1, l_2)\Big]\Big\}$$

Jetzt wird aber wegen der Wahl der l_k in (2. 8) und wegen (2. 7)

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{l_1}\sum_{l_2} J(m_1, m_2; b_1, b_2; l_1, l_2) \\ &= \int_0^{N(2\mathfrak{a})}\int_0^{N(2\mathfrak{a})} e^{2\pi i\left\{\sum_k b_k m_k t_k + \sum_q\left(\sum_k t_k \omega_k^{(q)}\right)^2 \omega^{(q)}\right\}} d t_1\, d t_2 \\ &= \mathfrak{J}(m_1, m_2; b_1, b_2) \end{aligned}\right\} \quad (2.9)$$

und schließlich

$$\frac{\{N(2\mathfrak{a})\}^2}{N(\mathfrak{a})} 4C(\omega) = \sum_{m_1}\sum_{m_2}\Big\{\sum_{b_1}\sum_{b_2}\mathfrak{J}(m_1, m_2; b_1, b_2)\Big\} \quad (2.91)$$

Wir wollen nun die Summation rechts in (2. 91) in folgender Weise ausführen; es werde bei festem $|m_1|$ und $|m_2|$ über alle vier Systeme (m_1, m_2) summiert, d. h. mit $|m_1|, |m_2|$ sollen auch $-|m_1|, -|m_2|; -|m_1|, |m_2|; |m_1|, -|m_2|$ auftreten (das wären im Falle $m_1 = 0$ $m_2 \neq 0$ allerdings nur zwei Systeme). Wenn man dann noch zuvor die Summation über die b_k ausführt, so entnimmt man aus (2. 9), daß dann jedes $\mathfrak{J}(m_1, m_2; b_1, b_2)$ viermal in der Gestalt $\mathfrak{J}(m_1, m_2; 1, 1)$ auftritt, und daraus folgt:

$$\sum_{m_1}\sum_{m_2}\sum_{b_1}\sum_{b_2}\mathfrak{J}(m_1, m_2; b_1, b_2) = 4\sum_{m_1}^{\circ}\sum_{m_2}\mathfrak{J}(m_1, m_2; 1, 1) \quad (2.92)$$

Hierin bedeutet das Zeichen $\circ$: mit m_1, m_2 soll zugleich über alle vier Systeme $b_1|m_1|, b_2|m_2|$, $b_1 = \pm 1$, $b_2 = \pm 1$ summiert werden, im Falle $m_k = 0$ werde $b_k = 0$ gesetzt, dann wird also nur über zwei bzw. nur ein System $(m_1 = m_2 = 0)$ summiert. In

(2. 92) rechts tritt also auch jedes System m_1, m_2 genau einmal auf, aber mit $P(m_1, m_2)$ als Punkt in der m_1, m_2-Ebene gedeutet zugleich alle zu den Achsen spiegelbildlich gelegenen Punkte.

Damit erhalten wir aus (2. 92) (2. 91) (2. 9)

$$\frac{\{N(2\mathfrak{a})\}^2}{N(\mathfrak{a})} C(\omega) = \sum_{m_1} \sum_{m_2} \mathfrak{J}(m_1, m_2) \tag{2.93}$$

mit

$$\mathfrak{J}(m_1, m_2) = \int_0^{N(2\mathfrak{a})} \int_0^{N(2\mathfrak{a})} e^{2\pi i \left\{ \sum_k m_k t_k + \sum_q \left(\sum_k t_k \omega_k^{(q)} \right)^2 \omega^{(q)} \right\}} d t_1 \, d t_2 \tag{2.94}$$

3. Umformung des Integrals $\mathfrak{J}(m_1, m_2)$.

Wir wollen nun den Exponenten im Integranden von $\mathfrak{J}(m_1, m_2)$ so umformen, daß wir nach einer linearen Substitution in den neuen Variablen nur quadratische Glieder haben. Zu diesem Zweck setzen wir an:

$$\sum_q \left(\sum_k (t_k + u_k) \omega_k^{(q)} \right)^2 \omega^{(q)} = \sum_q \left(\sum_k t_k \omega_k^{(q)} \right)^2 \omega^{(q)} \tag{3. 1}$$
$$+ \sum_q \left(\sum_k u_k \omega_k^{(q)} \right)^2 \omega^{(q)} + 2 \sum_q \left(\sum_k t_k \omega_k^{(q)} \cdot \sum_j u_j \omega_j^{(q)} \right) \omega^{(q)}$$

und verlangen

$$2 \sum_q \left(\sum_k t_k \omega_k^{(q)} \cdot \sum_j u_j \omega_j^{(q)} \right) \omega^{(q)} = \sum_k m_k t_k,$$

das heißt

$$m_k = 2 \sum_q \left(\sum_j u_j \omega_j^{(q)} \right) \omega_k^{(q)}$$
$$= 2 \sum_j u_j S(\omega_j \omega_k \omega) \qquad k = 1, 2 \tag{3. 2}$$
$$= S\left(2 \omega_k \omega \sum_j u_j \omega_j \right) \tag{3. 21}$$

Wir überzeugen uns davon, daß das Gleichungssystem (3. 2) eindeutig nach den u_j auflösbar ist. Die Determinante des Systems ist nämlich:

$$\Delta = \begin{vmatrix} S(2\omega_1\,\omega_1\,\omega) & S(2\omega_2\,\omega_1\,\omega) \\ S(2\omega_1\,\omega_2\,\omega) & S(2\omega_2\,\omega_2\,\omega) \end{vmatrix}$$

$$= 4 \begin{vmatrix} \omega_1^{(1)}\,\omega_2^{(1)} \\ \omega_1^{(2)}\,\omega_2^{(2)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \omega_1^{(1)}\,\omega^{(1)} & \omega_2^{(1)}\,\omega^{(1)} \\ \omega_1^{(2)}\,\omega^{(2)} & \omega_2^{(2)}\,\omega^{(2)} \end{vmatrix} \tag{3.3}$$

$$= 4\,N(\omega) \begin{vmatrix} \omega_1^{(1)}\,\omega_2^{(1)} \\ \omega_1^{(2)}\,\omega_2^{(2)} \end{vmatrix}^2 = 4\,N(\omega)\,d \neq 0$$

Für die u_j ergibt sich aus (3.2)

$$u_j = \sum_k m_k s_{kj}$$

worin die s_{kj} rationale Zahlen sind, denn die Koeffizienten der u_j sind als Spuren rationale Zahlen. Die u_j sind also selbst rationale Zahlen, woraus sich ergibt, daß die Zahl $\sum_j u_j \omega_j = \alpha$ eine Körperzahl ist. Wie sich aus (3.21) ergibt, hat diese Körperzahl α die Eigenschaft, daß $S(2\omega_k\,\omega\,\alpha)$ für $k = 1, 2$ ganz rational ist. Es sei umgekehrt α eine solche Körperzahl, daß $S(2\omega_k\,\omega\,\alpha)$ für $k = 1, 2$ ganz ist, dann bedeutet dies: es ist $S(2\beta\,\alpha)$ ganz, wenn nur β aus (ω) ist, denn $\omega_1\,\omega, \omega_2\,\omega$ ist eine Basis von (ω). Bringen wir dann α in die eindeutige Form $\alpha = \sum_j u_j \omega_j$, dann sind die Koeffizienten u_j stets Lösungen des Systems (3.2) für gewisse m_1, m_2. Wir finden also: die u_j durchlaufen ein solches System rationaler Zahlen, daß die Körperzahl $\alpha = \sum_j u_j \omega_j$ stets die Eigenschaft hat, daß $S(2\beta\,\alpha)$ ganz ist, sofern nur β in (ω) liegt, und dieses heißt, es liegt α in $\frac{1}{2\,\omega\,\mathfrak{d}}$.

Also haben wir:

$$\sum_j u_j \omega_j = \alpha \qquad \alpha \text{ aus } \frac{1}{2\,\omega\,\mathfrak{d}} \tag{3.4}$$

Und umgekehrt sind die Koeffizienten jedes solchen α aus (3.4) Lösungen von (3.2) für gewisse m_1, m_2.

Nun folgt aus (2.94), (3.1), (3.2)

$$\mathfrak{J}(m_1, m_2)$$

$$= e^{-2\pi i \sum_q \left(\sum_j u_j \omega_j^{(q)}\right)^2 \omega^{(q)}} \cdot \int_0^{N(2\mathfrak{a})} \int_0^{N(2\mathfrak{a})} e^{2\pi i \sum_q \left(\sum_k (t_k + u_k) \omega_k^{(q)}\right)^2 \omega^{(q)}} dt_1\, dt_2 \tag{3.5}$$

mit
$$u_j = \sum_k m_k s_{kj} \tag{3.6}$$

Führen wir gemäß (3.4) die Körperzahl α ein, so können wir auch schreiben:

$$\mathfrak{J}(m_1, m_2) = \mathfrak{J}(\alpha)$$

$$= e^{-2\pi i S(\alpha^2 \omega)} \int_0^{N(2\mathfrak{a})} \int_0^{N(2\mathfrak{a})} e^{2\pi i \sum_q \left(\sum_k (t_k + u_k(\alpha)) \omega_k^{(q)}\right)^2 \omega^{(q)}} dt_1\, dt_2 \tag{3.7}$$

mit α aus $\dfrac{1}{2\omega\mathfrak{d}}$,
$$\alpha^{(q)} = \sum_j u_j \omega_j^{(q)}. \tag{3.8}$$

4. Übergang zur Summation über ein Körperzahlsystem.

Es wäre nun zweckmäßig, wie man aus (2.93) und (3.7) entnimmt, statt über die m_1, m_2 über die α zu summieren. Denn die α sind den Systemen (m_1, m_2) umkehrbar eindeutig zugeordnet. Doch sind wir an die in (2.93) zum Ausdruck gebrachte Summationsvorschrift gebunden. Wir legen deshalb eine Partialsumme von (2.93) zugrunde

$$\sum_{\mathfrak{B}} \sum_{m_1} \sum_{m_2} \mathfrak{J}(m_1, m_2)$$

worin $\mathfrak{B}$ ein zu den beiden Achsen der m_1, m_2-Ebene symmetrisch gelegenes achsenparalleles Rechteck bedeutet, dessen Innerem und dessen Rande die Punkte $P(m_1, m_2)$ angehören sollen. Dann ist offenbar der Summationsvorschrift aus (2.93) genügt, auch kann $\mathfrak{B}$ sonst ganz beliebig sein. Ist nur die kleinere Seite von $\mathfrak{B}$ hinreichend groß, dann wird gelten:

$$\left| \sum_{m_1} \sum_{m_2} \mathfrak{F}(m_1, m_2) - \sum_{m_1} \sum_{m_2} \mathfrak{F}(m_1, m_2) \right| < \varepsilon(\mathfrak{B}) \qquad (4.1)$$

Setzen wir noch

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{B}) = \sum_{m_1} \sum_{m_2} \mathfrak{F}(m_1, m_2) \qquad (4.2)$$

dann können wir innerhalb $\mathfrak{L}(\mathfrak{B})$ beliebig umordnen. In den folgenden Rechnungen sind dann unter α, μ, ν usw. immer solche Körperzahlen verstanden, die zu (m_1, m_2) aus $\mathfrak{B}$ gehören; damit werden innerhalb gewisser Zahlbereiche gewisse Unterbereiche abgesteckt, was wir durch den Index $\mathfrak{B}$ ausdrücken, sofern Mißverständnisse nicht ausgeschlossen sind.

Setzen wir jetzt in (3.7) $\alpha = \frac{\lambda}{2\omega}$ mit λ aus $\frac{1}{\mathfrak{d}}$, dann wird $\alpha^2 \omega = \frac{\lambda^2}{4\omega}$. Bestimmen wir jetzt ein Ideal $\mathfrak{f}$ so, daß $\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{d} = \gamma$ und γ ein ganzes Hauptideal wird, dann ist $\frac{1}{\mathfrak{d}} = \frac{\mathfrak{f}}{\gamma}$ und $\lambda = \frac{\mu}{\gamma}$ mit $\mu \equiv 0 \bmod \mathfrak{f}$, und es wird $\alpha = \frac{\mu}{2\omega\gamma}$. Es wird dann:

$$\mathfrak{F}(\alpha) = \mathfrak{F}_1(\mu)$$

$$= e^{-2\pi i S\left(\frac{u^2}{\gamma^2 4\omega}\right)} \int_0^{N(2a)} \int_0^{N(2a)} e^{2\pi i \left\{ \sum_q \left(\sum_k \left(t_k + u_k \left(\frac{u}{2\omega\gamma} \right) \right) \omega_k^{(q)} \right)^2 \omega^{(q)} \right.} dt_1 dt_2 \qquad (4.3)$$

Nun war $\omega = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}$, also ist $\frac{1}{4\omega} = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}{4\mathfrak{b}} = \frac{\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{d}}{\mathfrak{b}_1}$ mit $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) = 1$, $\frac{1}{\gamma^2 4\omega} = \frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{f}^2 \mathfrak{d} \mathfrak{b}_1}$. Die Zahl $\frac{\mu^2}{\gamma^2 4\omega}$ ist jedenfalls dann eine Zahl aus $\frac{1}{\mathfrak{d}}$, wenn $\mu \equiv 0 \bmod \mathfrak{b}_1$ ist. Fordern wir noch $(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{f}) = 1$, was nach einem Satz aus der Idealtheorie stets möglich ist und eine neue erfüllbare Anforderung an das Ideal $\mathfrak{f}$ bedeutet, dann muß ein solches μ der Bedingung genügen $\mu \equiv 0 \bmod \mathfrak{b}_1 \mathfrak{f}$. Wegen $(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{f}) = 1$ können wir jetzt in $\mathfrak{f}$ ein vollständiges Restsystem mod. $\mathfrak{b}_1$ angeben, dies sei das System:

$$\varrho_1, \varrho_2, \cdots, \varrho_{N(\mathfrak{b}_1)}$$

Dann gilt für jedes μ aus $\mathfrak{f}$

$$\mu = \varrho_s + \nu \quad \text{mit} \quad \nu \equiv 0 \bmod \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{b}_1 \tag{4.4}$$

Es wird dann ferner

$$u_k\left(\frac{\mu}{2\omega\gamma}\right) = u_k\left(\frac{\varrho}{2\omega\gamma}\right) + u_k\left(\frac{\nu}{2\omega\gamma}\right)$$

$$\frac{\nu}{2\omega\gamma} = \frac{\mathfrak{b}_1 \cdot \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{c} \cdot 2\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{d}}{\mathfrak{d} \cdot \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{b}_1} = \mathfrak{c} \cdot 2\mathfrak{a}_1$$

Die Zahl $\frac{\nu}{2\omega\gamma}$ liegt also in dem Ideal $2\mathfrak{a}_1$.

Setzen wir noch $\frac{\nu}{2\omega\gamma} = \tau$, so gilt also

$$\frac{\nu}{2\omega\gamma} = \tau \equiv 0 \bmod 2\mathfrak{a}_1 . \tag{4.5}$$

Nun ist noch

$$\mathfrak{d}\,\frac{(\tau 2\omega\gamma)^2}{\gamma^2 4\omega} = \frac{4\mathfrak{a}_1{}^2 \cdot \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}^2}{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}^2 \cdot \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{b}_1$$

$$\mathfrak{d}\,\frac{4\varrho\tau\omega\gamma}{\gamma^2 4\omega} = \frac{\mathfrak{c}' \cdot \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{c} \cdot 2\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{d}}{\mathfrak{d} \cdot \mathfrak{f}} = \mathfrak{c}' \cdot \mathfrak{c} \cdot 2\mathfrak{a}_1$$

und daraus folgt

$$\mathfrak{F}(\alpha) = \mathfrak{F}_1(\mu) = \mathfrak{F}_2(\varrho, \tau) \tag{4.6}$$

$$= e^{-2\pi i S\left(\frac{\varrho^2}{\gamma^2 4\omega}\right)} \int_{c_1(\varrho)}^{c_1(\varrho)+N(2\mathfrak{a})} \int_{c_2(\varrho)}^{c_2(\varrho)+N(2\mathfrak{a})} e^{2\pi i \sum_q \left(\sum_k (t_k + u_k(\tau))\omega_k^{(q)}\right)^2 \omega^{(q)}} dt_1\, dt_2$$

mit

$$c_k(\varrho) = u_k\left(\frac{\varrho}{2\omega\gamma}\right) . \tag{4.7}$$

Der Faktor vor dem Integral hängt nun von τ gar nicht mehr ab.

Würde nun in (2. 93) über alle m_1, m_2 summiert werden, so würde in (4. 6) $\mathfrak{F}_2(\varrho, \tau)$ über alle τ der Eigenschaft $\tau \equiv 0 \bmod 2\mathfrak{a}_1$ und die ϱ aus (4. 4) summiert werden. Wir haben gemäß (4. 2)

über einen durch $\mathfrak{B}$ gekennzeichneten Unterbereich zu summieren und haben also:

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{B}) = \sum_{\varrho} \sum_{\tau} \mathfrak{J}_2(\varrho, \tau) \tag{4.8}$$

mit $\mathfrak{J}_2(\varrho, \tau)$ aus (4.6).

5. Zerfällung des Gitters $P(c_k(\varrho) + u_k(\tau))$ in Untergitter und der Zusammenschluß der Integrale $\mathfrak{J}_2(\varrho, \tau)$.

Wir betrachten jetzt in der t_1, t_2-Ebene die Punkte

$$P(c_1(\varrho) + u_1(\tau), \quad c_2(\varrho) + u_2(\tau))$$

Es werde zunächst von der durch das Rechteck $\mathfrak{B}$ gekennzeichneten Einschränkung abgesehen. Wir setzen $\varrho = \varrho_s$ und lassen τ also alle Zahlen aus $2\mathfrak{a}_1$ durchlaufen. Wir nennen dann die Gesamtheit der Punkte

$$P(c_1(\varrho_s) + u_1(\tau), \quad c_2(\varrho_s) + u_2(\tau))$$

$\mathfrak{G}_s$ und haben also $N(\mathfrak{b}_1)$ $(s = 1, \cdots, N(\mathfrak{b}_1))$ Punktsysteme $\mathfrak{G}_s$. Jedes System $\mathfrak{G}_s$ bildet ein Gitter, und da die Systeme $\mathfrak{G}_s$ auseinander durch Translation hervorgehen, genügt die Untersuchung von $\mathfrak{G}_1$. Es sei für $s = 1$ $\varrho_1 = 0$, dann ist auch $c_k(0) = 0$ $(k = 1, 2)$. Es ist also $\mathfrak{G}_1$ das System der Punkte $P(u_1(\tau), u_2(\tau))$.

Wir legen wieder eine spezielle Basis des Ideals $2\mathfrak{a}_1$ fest in der Form:

$$\tau_1 = u_{11}\,\omega_1$$
$$\tau_2 = u_{21}\,\omega_1 + u_{22}\,\omega_2$$

worin u_{11} und u_{22} wieder wie in (1.2) die Minimaleigenschaft haben und also wieder $N(2\mathfrak{a}_1) = \prod_1^2 u_{kk}$ gilt. Dann ist jedes τ eindeutig in die Form zu bringen:

$$\tau = \sum_{l=1}^{2} v_l \tau_l = \sum_{l=1}^{2} v_l \sum_{k=1}^{l} u_{lk}\,\omega_k = \sum_{k=1}^{2} \omega_k \sum_{l=k}^{2} v_l\, u_{lk}$$

Daraus folgt

$$u_k(\tau) = \sum_{l=k}^{2} v_l u_{lk} \tag{5.1}$$

worin die v_l beliebige ganze rationale Zahlen sind. Die Beziehung (5.1) zeigt, daß das System $\mathfrak{G}_1$ in der Tat ein Punktgitter darstellt. Alle Punkte, deren Koordinaten Vielfache von $N(2\mathfrak{a}_1)$ sind, gehören zu $\mathfrak{G}_1$. Denn wegen $2\mathfrak{a}_1 \mid N(2\mathfrak{a}_1)$ gilt stets

$$N(2\mathfrak{a}_1) \sum_k l_k \omega_k \equiv 0 \bmod. 2\mathfrak{a}_1$$

mit beliebigen ganz rationalen l_k. Da aber wiederum $\mathfrak{a}_1$ ein Teiler von $\mathfrak{a}$ war, ist auch $\mathfrak{a}_1 \mid N(2\mathfrak{a})$, und alle Punkte, deren Koordinaten Vielfache von $N(2\mathfrak{a})$ sind, gehören erst recht zu $\mathfrak{G}_1$. Man ersieht also, daß in (4.6) die Integrationsgrenzen für $\varrho = \varrho_s$ zu $\mathfrak{G}_s$ gehören. Wir schließen nun alle Punkte des Systems $\mathfrak{G}_1$ mit der Eigenschaft

$$u_k \equiv u_k' \bmod. N(2\mathfrak{a}) \qquad k = 1, 2$$

zu Untergittern $\mathfrak{G}_1{}^i$ zusammen. Um jeden solchen Punkt ist nach (4.6) ein achsenparalleles Quadrat von der Seitenlänge $N(2\mathfrak{a})$ mit diesem Punkt als linken unteren Eckpunkt zu legen. Die Quadrate, die zu den Punkten des Systems $\mathfrak{G}_1{}^i$ gehören, schließen sich gerade zu einer lückenlosen, schlichten Bedeckung der Ebene zusammen. Ebenso zerfällen wir die Gitter $\mathfrak{G}_s$ in Untergitter $\mathfrak{G}_s{}^i$ derselben Eigenschaft. Wegen der Kongruenz der Gitter $\mathfrak{G}_s$ gibt es für jedes s dieselbe Anzahl Untergitter $\mathfrak{G}_s{}^i$. Es gibt aber soviel Systeme $\mathfrak{G}_1{}^i$, wie es in dem Quadrat $0 \leqq t_k \leqq N(2\mathfrak{a})$ Gitterpunkte gibt, deren Koordinaten sich nicht um Vielfache von $N(2\mathfrak{a})$ unterscheiden. Diese Anzahl sei A.

Wir bestimmen nunmehr A. Nach (5.1) war

$$u_k(\tau) = \sum_{l=k}^{2} v_l u_{lk}$$

also $u_2 = v_2 u_{22}$. In dem Bereich $0 \leqq u_2 < N(2\mathfrak{a})$ liegen also $\frac{N(2\mathfrak{a})}{u_{22}}$ Koordinaten u_2. Es wird weiter $u_1(\tau) = v_2 u_{21} + v_1 u_{11}$. Da durch v_2 bereits u_2 eindeutig bestimmt ist, da es im Quadrat ferner für

jedes u_2 gleich viel Gitterpunkte gibt, genügt es, $v_2 = 0$ anzunehmen. Für $v_2 = 0$ gibt es aber $\frac{N(2\mathfrak{a})}{u_{11}}$ Koordinaten u_1. Mithin erhalten wir:

$$A = \{N(2\mathfrak{a})\}^2 \prod_1^2 \frac{1}{u_{kk}} = \{N(2\mathfrak{a})\}^2 \frac{1}{N(2\mathfrak{a}_1)} \tag{5.2}$$

Jedes System $\mathfrak{G}_s$ zerfällt also wiederum in $\frac{\{N(2\mathfrak{a})\}^2}{N(2\mathfrak{a}_1)}$ Untergitter $\mathfrak{G}_s^i \left(i = 1, \ldots, \frac{\{N(2\mathfrak{a})\}^2}{N(2\mathfrak{a}_1)}\right)$, und die zu den Punkten von $\mathfrak{G}_s^i$ gehörigen achsenparallelen Quadrate bedecken die Ebene lückenlos und schlicht.

Von den Punkten der Gitter $\mathfrak{G}_s^i$ müssen wir nun noch diejenigen aussondern, die durch das Rechteck $\mathfrak{B}$ gekennzeichnet sind. $\mathfrak{B}$ war ein zum Nullpunkt der m_1, m_2-Ebene symmetrisch gelegenes, achsenparalleles Rechteck. Dieses Rechteck $\mathfrak{B}$ geht durch die Transformation (3.2) in ein zum Nullpunkt der t_1, t_2-Ebene symmetrisch gelegenes Parallelogramm $\mathfrak{P}$ über, welches nicht mehr achsenparallel zu sein braucht. Es sind also nur alle Gitterpunkte aus $\mathfrak{G}_s^i$ zu betrachten, die in und auf $\mathfrak{P}$ liegen. Wir schreiben dann (4.8) in der Form:

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{B}) = \sum_{\varrho_s} \sum_{i=1}^{A} \sum_{\tau(i)}^{\mathfrak{B}} \mathfrak{J}_2\left(\varrho_s, \tau(i)\right)$$

oder

$$= \sum_{\varrho_s} \sum_{i=1}^{A} \sum_{\tau\left(\mathfrak{G}_s^i\right)}^{\mathfrak{P}} \mathfrak{J}_2\left(\varrho_s, \tau\left(\mathfrak{G}_s^i\right)\right) \tag{5.3}$$

womit angedeutet werden soll, daß nur über die Gitterpunkte des Parallelogramms $\mathfrak{P}$ summiert wird.

Setzen wir

$$\sum_{\tau\left(\mathfrak{G}_s^i\right)} \mathfrak{J}_2\left(\varrho_s, \tau\left(\mathfrak{G}_s^i\right)\right) = \mathfrak{T}(s, i)$$

so ist wegen des Zusammenschlusses der Integrale

$$e^{2\pi i S\left(\frac{\varrho^2}{\gamma^2 4\omega}\right)} \mathfrak{T}(s,i) = \int\int_{\mathfrak{P}_s^i} e^{2\pi i \sum_q \left(\sum_k t_k \omega_k^{(q)}\right)^2 \omega^{(q)}} d t_1 \, d t_2 \qquad (5.4)$$

Der Bereich $\mathfrak{P}_s^i$ ist ein Zackenbereich, dessen Rand stückweise linear ist, die linearen Randstücke sind entweder parallel zur t_1- oder zur t_2-Achse und haben die Länge $N(2\mathfrak{a})$. In allen $\mathfrak{P}_s^i$ liegt ein zu $\mathfrak{P}$ paralleles Parallelogramm $\mathfrak{P}'$ vollkommen darin, welches mit $\mathfrak{P}$ zugleich groß wird. Das folgt sofort daraus, daß $\mathfrak{P}_s^i$ durch Zusammenschluß der Quadrate zustande kommt.

Wir haben nun nach (5.3) (5.4)

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{B}) = \sum_{\varrho_s} \sum_{i=1}^{A} \mathfrak{T}(s,i)$$

mit

$$\mathfrak{T}(s,i) = e^{-2\pi i S\left(\frac{\varrho_s^2}{\gamma^2 4\omega}\right)} \cdot \int\int_{\mathfrak{P}_s^i} e^{2\pi i \sum_q \left(\sum_k t_k \omega_k^{(q)}\right)^2 \omega^{(q)}} d t_1 \, d t_2 \qquad (5.5)$$

6. Auswertung der Integrale durch den Grenzübergang.

Durch die Substitution $\sum_k t_k \omega_k^{(q)} = x_q$ möge $\mathfrak{P}_s^i$ in einen Bereich Π_s^i, $\mathfrak{P}'$ in ein Parallelogramm Π' übergehen. Dann wird

$$\mathfrak{T}(s,i) = e^{-2\pi i S\left(\frac{\varrho_s^2}{\gamma^2 4\omega}\right)} \frac{1}{\sqrt{d}} \int\int_{\Pi_s^i} e^{2\pi i \sum_q x_q^2 \omega^{(q)}} d x_1 \, d x_2 \qquad (6.1)$$

Das zum Nullpunkt symmetrische Parallelogramm Π' liegt ganz in jedem Π_s^i. In Π' können wir dann ein achsenparalleles, zum Nullpunkt symmetrisches Quadrat Q angeben, welches mit Π', also mit $\mathfrak{P}$ (bzw. $\mathfrak{B}$) groß wird. Dann zerlegen wir Π_s^i in Q und den Rest R_s^i. Sind $x_1 = +h$, $x_1 = -h$, $x_2 = +h$, $x_2 = -h$ die Gleichungen, denen die Ränder von Q genügen, so werde noch R_s^i in die vier Bereiche zerfällt:

$$
\begin{aligned}
&R_s^i(1) \text{ der Teil von } \Pi_s^i \text{ mit } && x_2 \geqq h \\
&R_s^i(2) \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} && x_2 \leqq -h \\
&R_s^i(3) \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} && |x_2| \leqq h \qquad x_1 \geqq h \\
&R_s^i(4) \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} && |x_2| \leqq h \qquad x_1 \leqq -h
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

Dann wird:

$$
\mathfrak{T}(s,i) = \frac{1}{\sqrt{d}} e^{-2\pi i S\left(\frac{\varrho s^2}{\gamma^2 4\omega}\right)} \left\{ \int\int_Q e^{2\pi i \sum_q x_q^2 \omega^{(q)}} d x_1 d x_2 + \sum_{k=1}^{4} \int\int_{R_s^i(k)} e^{2\pi i \sum_q x_q^2 \omega^{(q)}} d x_1 d x_2 \right\} \tag{6.3}
$$

Der Zackenrand von Π_s^i hat nun folgende Eigenschaft: es gibt zwei konstante Größen δ_1 und δ_2, so daß, wenn $x_{1,i}; x_{2,i}$ ein Punkt des Zackenrandes ist, auch $x_{1,i} + n\delta_1$, $x_{2,i} + n\delta_2$ ein Punkt desselben ist, wenn nur Π_s^i groß genug ist. Das heißt, es gibt ein gewisses Stück der Zackenkurve mit den Koordinaten $x_{1,i} \leqq x_1 \leqq x_{1,i} + \delta_1$, $x_{2,i} \leqq x_2 \leqq x_{2,i} + \delta_1$, so daß alle darauffolgenden, bzw. vorhergehenden Stücke durch die Transformation $x_1 + n\delta_1$, $x_2 + n\delta_2$ daraus hervorgehen, jedenfalls solange die transformierten Stücke noch zu R_s^i gehören, und das wird für genügend große Π_s^i (d. h. $\mathfrak{B}$) auch noch für große positive bzw. negative n gelten. Wir können das auch so sagen: die Zackenkurve reproduziert sich periodisch, solange sie als Ganzes nicht ihre Richtung wechselt, denn als Ganzes verläuft sie in der Richtung einer Seite von Π'.

Diese angegebene Eigenschaft folgt daraus, daß die Seiten von $\mathfrak{P}$ parallel den Geradenscharen verlaufen, die das Gitter $\mathfrak{G}_s^i$ erzeugen.

Jetzt zerlegen wir $R_s^i(k)$ in eine Summe bzw. Differenz von endlich und beschränkt vielen Bereichen $R_s^i(k,l)$:

$$
X_1' \leqq x_1 = X_1 \qquad \overline{X}_2 \leqq x_2 \leqq \overline{X}_2 + \varphi(x_1)
$$

beziehungsweise

$$X_2' \leqq x_2 \leqq X_2 \qquad \overline{X}_1 \leqq x_1 \leqq \overline{X}_1 + \psi(x_2)$$

beziehungsweise (6. 4)

$$X_1' \leqq x_1 < X_1 \qquad \overline{X}_2 - \varphi(x_1) \leqq x_2 \leqq \overline{X}_2$$

beziehungsweise

$$X_2' = x_2 = X_2 \qquad \overline{X}_1 - \psi(x_2) \leqq x_1 \leqq \overline{X}_1$$

Darin sind die $\varphi(x_1)$ (bzw. $\psi(x_2)$) stückweis lineare Funktionen, die allerdings sprunghaft unstetig sein können (weil z. B. der Zackenrand nicht als eindeutige Funktion von x_1 darstellbar zu sein braucht), und die sich nach dem Vorhergehenden den Transformationen

$$x_1 + n\,\delta_1 \qquad x_2 + n\,\delta_2 \tag{6. 41}$$

gemäß reproduzieren. Eventuell braucht sich diese Reproduktion nicht zu schließen, da an den Enden etwa des Intervalls

$$X_1' \leqq x_1 \leqq X_1$$

ein Überschuß vorhanden sein kann. Dieser überschüssige Teil des Zackenrandes aber liegt stets in einem Intervall von beschränkter Länge. In einem x_1-Intervall der Länge δ_1 liegen nur endlich viele lineare Stücke, deren Anzahl unterhalb einer festen, von $R_s^i(k, l)$ und der Größe von Π_s^i unabhängigen Schranke liegt.

Nun sei das Rechteck $\mathfrak{B}$ der m_1, m_2-Ebene insbesondere ein Quadrat. Dann sei r der Radius des kleinsten Kreises um den Nullpunkt der x_1, x_2-Ebene, in dem alle Π_s^i liegen.

Dann läßt sich das Quadrat Q so angeben, daß

$$r > h > C \cdot r \tag{6. 42}$$

ist, worin C eine positive, feste, d. h. von der Größe von $\mathfrak{B}$ (oder Π_s^i) unabhängige Konstante ist. Dann gilt auch:

$$r > |\overline{X}_2| > C \cdot r \qquad r > |\overline{X}_1| > C \cdot r \tag{6. 43}$$

$$r > |\overline{X}_2 + \varphi(x_1)| > C \cdot r \qquad r > |\overline{X}_1 + \psi(x_2)| > C \cdot r$$

usw.

Es wird weiter:

$$\left| \mathfrak{T}(s,i) - \frac{1}{\sqrt{d}}\, e^{-2\pi i S\left(\frac{\varrho_S{}^2}{\gamma^2 4\omega}\right)} \int\limits_{Q}\int e^{2\pi i \sum\limits_{q} x_q{}^2 \omega^{(q)}}\, d x_1\, d x_2 \right|$$

$$< \left\{ \sum_k \sum_l |U(s,i,k,l)| \right\} \left| \frac{1}{\sqrt{d}}\, e^{-2\pi i S\left(\frac{\varrho_S{}^2}{\gamma^2 4\omega}\right)} \right| \tag{6.5}$$

mit

$$U(s,i,k,l) = \int\limits_{R_S^{\,i}(k,l)}\int e^{2\pi i \sum\limits_{q} x_q{}^2 \omega^{(q)}}\, d x_1\, d x_2 \tag{6.6}$$

Wir schätzen nun $U(s,i,k,l)$ ab und legen, da alle Integrale vom selben Typ sind, $U(s,i,k,l)$ in der Form zugrunde:

$$U(s,i,k,l) = \int\limits_{X_1'}^{X_1} e^{2\pi i x_1{}^2 \omega^{(1)}}\, d x_1 \int\limits_{\overline{X}_2}^{\overline{X}_2 + \varphi(x_1)} e^{2\pi i x_2{}^2 \omega^{(2)}}\, d x_2$$

Durch die Substitution $x_2{}^2 = u$ wird:

$$\int\limits_{\overline{X}_2}^{\overline{X}_2 + \varphi(x_1)} e^{2\pi i x_2{}^2 \omega^{(2)}}\, d x_2 = \frac{1}{2} \int\limits_{\overline{X}_2{}^2}^{(\overline{X}_2 + \varphi(x_1))^2} \frac{e^{2\pi i u\, \omega^{(2)}}}{u^{1/2}}\, d u$$

$$= \frac{1}{4\pi i \omega^{(2)}} \frac{e^{2\pi i (\overline{X}_2 + \varphi(x_1))^2 \omega^{(2)}}}{\overline{X}_2 + \varphi(x_1)} - \frac{1}{4\pi i \omega^{(2)}} \frac{e^{2\pi i \overline{X}_2{}^2 \omega^{(2)}}}{\overline{X}_2}$$

$$+ \frac{1}{8\pi i \omega^{(2)}} \int\limits_{\overline{X}_2{}^2}^{(\overline{X}_2 + \varphi(x_1))^2} \frac{e^{2\pi i u\, \omega^{(2)}}}{u^{3/2}}\, d u$$

Damit wird:

$$U(s,i,k,l) = \frac{1}{4\pi i \omega^{(2)}} \int\limits_{X_1'}^{X_1} \frac{e^{2\pi i [x_1{}^2 \omega^{(1)} + (\overline{X}_2 + \varphi(x_1))^2 \omega^{(2)}]}}{\overline{X}_2 + \varphi(x_1)}\, d x_1$$

$$- \frac{1}{4\pi i \omega^{(2)}} \int\limits_{X_1'}^{X_1} \frac{e^{2\pi i [x_1{}^2 \omega^{(1)} + \overline{X}_2{}^2 \omega^{(2)}]}}{\overline{X}_2}\, d x_1 \tag{6.60}$$

$$+ \frac{1}{8\pi i \omega^{(2)}} \int\limits_{X_1'}^{X_1} e^{2\pi i x_1{}^2 \omega^{(1)}}\, d x_1 \int\limits_{\overline{X}_2{}^2}^{(\overline{X}_2 + \varphi(x_1))^2} \frac{e^{2\pi i u\, \omega^{(2)}}}{u^{3/2}}\, d u$$

Nun ist:

$$\left| \frac{1}{4\pi i \omega^{(2)}} \int_{X_1'}^{X_1} \frac{e^{2\pi i [x_1^2 \omega^{(1)} + \overline{X}_2^2 \omega^{(2)}]}}{\overline{X}_2} \, dx_1 \right| < \frac{C_1}{\overline{X}_2} \tag{6.61}$$

da $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i a x^2} \, dx$ existiert, ferner

$$\left| \frac{1}{8\pi i \omega^{(2)}} \int_{X_1'}^{X_1} e^{2\pi i x_1^2 \omega^{(1)}} \, dx_1 \int_{\overline{X}_2^2}^{(\overline{X}_2 + \varphi(x_1))^2} \frac{e^{2\pi i u \omega^{(2)}}}{u^{3/2}} \, du \right| < \frac{C_2 (X_1 - X_1')}{\overline{X}_2^3} \tag{6.62}$$

Wir setzen:

$$U_1(s, i, k, l)) = \frac{1}{4\pi i \omega^{(2)}} \int_{X_1'}^{X_1} \frac{e^{2\pi i [x_1^2 \omega^{(1)} + (\overline{X}_2 + \varphi(x_1))^2 \omega^{(2)}]}}{\overline{X}_2 + \varphi(x_1)} \, dx_1 \tag{6.63}$$

Wir betrachten nun ein lineares Stück von $\varphi(x_1)$ mit $\alpha \leqq x_1 \leqq \beta$. Es genüge der Gleichung $\varphi(x_1) = a\, x_1 + b$. Wir integrieren dann zunächst nach (6.41) über alle Intervalle

$$\alpha + n\, \delta_1 \leqq x_1 \leqq \beta + n\, \delta_1$$

und erhalten

$$U_1(s, i, k, l) = \sum_{\alpha} \sum_{n} U_1(s, i, k, l, \alpha, n) + V(s, i, k, l) \tag{6.64}$$

worin $V(s, i, k, l)$ der Rest ist, da sich die periodische Reproduktion von $\varphi(x_1)$ nicht zu schließen braucht. Jedenfalls gilt für $V(s, i, k, l)$ die Abschätzung (6.61), wie aus (6.63) hervorgeht. Denn die Länge des Integrationswegs ist für $V(s, i, k, l)$ beschränkt. Also

$$| V(s, i, k, l) | < \frac{C_3}{\overline{X}_2} \tag{6.65}$$

In (6.64) soll die Summation über die α die Summation über die endlich vielen (und beschränkt vielen) linearen Stücke bedeuten, die sich nicht gemäß (6.41) transformieren.

Es wird nun weiter:

$$U_1(s,i,k,l,\alpha,n) = \frac{1}{4\pi i \omega^{(2)}} \int_\alpha^\beta \frac{e^{2\pi i\left[(x_1+n\delta_1)^2\omega^{(1)} + (\overline{X}_2 + a x_1 + b + n\delta_2)^2 \omega^{(2)}\right]}}{\overline{X}_2 + a x_1 + b + n\delta_2} dx_1 \tag{6.66}$$

Suchen wir im Exponenten die quadratische Ergänzung, so finden wir:

$$\begin{aligned}
&(x_1 + n\delta_1)^2 \omega^{(1)} + (\overline{X}_2 + a x_1 + b + n\delta_2)^2 \omega^{(2)} \\
&= \left\{ x_1 \left(\sqrt{\omega^{(1)} + a^2 \omega^{(2)}}\right) + \frac{a\omega^{(2)}\left(\overline{X}_2 + b + n\delta_2\right) + n\delta_1 \omega^{(1)}}{\sqrt{\omega^{(1)} + a^2\omega^{(2)}}} \right\}^2 \\
&\quad + \left(\overline{X}_2 + b + n\delta_2\right)^2 \omega^{(2)} + n^2 \delta_1{}^2 \omega^{(1)} \\
&\quad - \left\{ \frac{a\omega^{(2)}\left(\overline{X}_2 + b + n\delta_2\right) + n\delta_1\omega^{(1)}}{\sqrt{\omega^{(1)} + a^2\omega^{(2)}}} \right\}^2
\end{aligned}$$

wobei noch angenommen wurde, daß etwa $\omega^{(1)} + a^2\omega^{(2)} > 0$ ist. Der Fall $\omega^{(1)} + a^2\omega^{(2)} < 0$ ist genau so zu behandeln.

Setzen wir:

$$\sqrt{\omega^{(1)} + a^2\omega^{(2)}} = a' > 0$$

$$\frac{a\omega^{(2)}\left(\overline{X}_2 + b + n\delta_2\right) + n\delta_1\omega^{(1)}}{\sqrt{\omega^{(1)} + a^2\omega^{(2)}}} = b'$$

so wird (6.66)

$$|U_1(s,i,k,l,\alpha,n)| \leq \left| C \cdot \int_\alpha^\beta \frac{e^{2\pi i(x_1 a' + b')^2}}{\overline{X}_2 + a x_1 + b + n\delta_2} dx_1 \right|$$

Da nun $\overline{X}_2 + a x_1 + b + n\delta_2 > C \cdot r$ nach (6.43) ist, erhält man, wenn man den Integranden in Real- und Imaginärteil spaltet, nach dem zweiten Mittelwertsatz ($\overline{X}_2 + a x_1 + b + n\delta_2$ sei z. B. monoton fallend):

$$\begin{aligned}
|U_1(s,i,k,l,\alpha,n)| < \frac{C_4}{r} \Bigg[&\left| \int_\alpha^{\xi_1} \cos 2\pi (x_1 a' + b')^2 dx_1 \right| \\
&+ \left| \int_\alpha^{\xi_2} \sin 2\pi (x_1 a' + b')^2 dx \right| \Bigg]
\end{aligned}$$

mit $\alpha < \xi_1 < \beta \qquad \alpha < \xi_2 < \beta$

Man setze noch $x_1 a' + b' = u$. Dann wird:

$$|U_1(s,i,k,l,\alpha,n) < \frac{C_4}{r}\left[\left|\int_{a'\alpha+b'}^{a'\xi_1+b'} \cos(u^2 2\pi)\,du\right| + \left|\int_{a'\alpha+b'}^{a'\xi_2+b'} \sin(u^2 2\pi)\,du\right|\right] \quad (6.67)$$

wenn noch vorausgesetzt wird:

$$0 < a'\alpha + b' < a'\beta + b'.$$

Dies bedeutet keine Einschränkung. Denn die endlich und beschränkt vielen $U_1(s, i, k, l, \alpha, n)$, für die $a'\alpha + b'$ und $a'\beta + b'$ verschiedenes Vorzeichen haben sollten, beziehen wir insgesamt in die Abschätzung (6.61) ein. Die Fälle $0 < a'\alpha + b' < a'\beta + b'$ und $0 > a'\beta + b' > a'\alpha + b'$ nun sind analog zu behandeln.

Wir beschränken uns also auf den Fall

$$0 < a'\alpha + b' < a'\beta + b'$$

und wollen noch

$$a'\alpha + b' > c > 0$$

annehmen, für die anderen

$$U_1(s, i, k, l, \alpha, n)$$

gelte wieder insgesamt (6.61).

Nach der Substitution $u^2 = v$ und Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes erhält man aus (6.67)

$$\left.\begin{aligned} |U_1(s,i,k,l,\alpha,n)| &< \frac{C_5}{r(a'\alpha+b')} \\ &< \frac{C_6}{r\{a'^2\alpha + a\,\omega^{(2)}(\bar{X}_2 + b) + n(a\,\omega^{(2)}\delta_2 + \omega^{(1)}\delta_1)\}} \\ &< \frac{C_6}{r}\,\frac{1}{A(\alpha)+n\delta} \end{aligned}\right\} \quad (6.68)$$

Falls $\delta = 0$, gilt auch wegen $A(\alpha) > C \cdot r$ die Abschätzung (6.69).

Aus (6.68) (6.65) (6.64) folgt nun:

$$|U_1(s,i,k,l)| < \frac{C_7}{\bar{X}_2} + \frac{C_8 \log r}{r} \quad (6.69)$$

wenn man noch bedenkt, daß auch $|X_1| < r$ $|X_1'| < r$ sein muß.

Aus (6.69) (6.63) (6.62) (6.61) (6.60) ergibt sich schließlich:

$$|U(s,i,k,l)| < \frac{C_1}{\bar{X}_2} + \frac{C_2(X_1 - X_1')}{\bar{X}_2^3} + \frac{C_7}{\bar{X}_2} + \frac{C_8 \log r}{r}$$

oder wegen (6.43)

$$|U(s,i,k,l)| < \frac{C_9}{r} + \frac{C_{10}}{r^2} + \frac{C_8 \log r}{r} \tag{6.7}$$

Es konvergiere nun das Quadrat $\mathfrak{B}$ gegen die ganze Ebene $\mathfrak{B} \to \mathfrak{E}$. Dann wächst r und wegen (6.42) auch h ins Unendliche. Dann wird aber:

$$\lim_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{E}} \int_Q \int e^{2\pi i \sum_q x_q{}^2 \omega^{(q)}} d x_1 \, d x_2 = \lim_{h\to\infty} \int_{-h}^{+h} e^{2\pi i x_1{}^2 \omega^{(1)}} d x_1 \int_{-h}^{+h} e^{2\pi i x_2{}^2 \omega^{(2)}} d x_2$$

$$= \frac{e^{\frac{\pi i}{4} S(\operatorname{sgn}\omega)}}{\sqrt{N(2\omega)}} \quad \text{mit } S(\operatorname{sgn}\omega) = \operatorname{sgn}\omega^{(1)} + \operatorname{sgn}\omega^{(2)} \tag{6.8}$$

da ja

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi i a x^2} d x = \frac{e^{\frac{\pi i}{4} \operatorname{sgn} a}}{\sqrt{|a|}}$$

Aus (6.8) und (6.7) folgt nun wegen (6.5):

$$\mathfrak{T}(s,i) = \frac{1}{\sqrt{d}} \frac{e^{\frac{\pi i}{4} S(\operatorname{sgn}\omega)}}{\sqrt{N(2\omega)}} e^{-2\pi i S\left(\frac{\varrho_s{}^2}{\gamma^2 4\omega}\right)} \tag{6.9}$$

7. Die Reziprozitätsformel.

Aus (6.9), (5.5), (5.2), (4.2), (4.1) und (2.93) ergibt sich jetzt:

$$\frac{\{N(2\mathfrak{a})\}^2}{N(\mathfrak{a})} C(\omega) = \frac{\{N(2\mathfrak{a})\}^2 e^{\frac{\pi i}{4} S(\operatorname{sgn}\omega)}}{N(2\mathfrak{a}_1)\sqrt{d}\sqrt{N(2\omega)}} \sum_{\varrho_s} e^{-2\pi i S\left(\frac{\varrho_s{}^2}{\gamma^2 4\omega}\right)}$$

oder wegen (4.4):

$$C(\omega) = \frac{N(\mathfrak{a}) e^{\frac{\pi i}{4} S(\operatorname{sgn}\omega)}}{N(2\mathfrak{a}_1)\sqrt{d}\sqrt{N(2\omega)}} \sum_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{b}_1 \\ \varrho \equiv 0 \bmod \mathfrak{f}}} e^{-2\pi i S\left(\frac{\varrho^2}{\gamma^2 4\omega}\right)} \tag{7.1}$$

Da $\varrho \equiv 0 \bmod \mathfrak{f}$ ist, dürfen wir ϱ in der Form ansetzen $\varrho = \varrho' \cdot \varkappa$ mit $\varkappa \equiv 0 \bmod \mathfrak{f}$ und $(\varkappa, \mathfrak{b}_1) = 1$, worin jetzt ϱ' ein vollständiges Restsystem mod. $\mathfrak{b}_1$ durchläuft. Dann wird

$$\frac{\varrho^2}{\gamma^2 4\omega} = \frac{\varrho'^2 \varkappa^2}{\gamma^2 4\omega} = \varrho'^2 \frac{1}{4\omega}\left(\frac{\varkappa}{\gamma}\right)^2$$

und

$$\frac{\varkappa^2}{\gamma^2 4\omega} = \frac{\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{c}^2}{\mathfrak{d} \cdot \mathfrak{b}_1}$$

mit $(\mathfrak{c}, \mathfrak{b}_1) = 1$, das heißt aber $\mathfrak{d} \frac{1}{4\omega}\left(\frac{\varkappa}{\gamma}\right)^2$ hat den reduzierten Nenner $\mathfrak{b}_1$. Setzen wir noch $\frac{\varkappa}{\gamma} = \nu$, so ist $\nu \cdot \mathfrak{d}$ zu $\mathfrak{b}_1$ teilerfremd. Wir können also schreiben:

$$\sum_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{b}_1 \\ \varrho \equiv 0 \bmod \mathfrak{f}}} e^{-2\pi i S\left(\frac{\varrho^2}{\gamma^2 4\omega}\right)} = \sum_{\varrho' \bmod \mathfrak{b}_1} e^{-2\pi i S\left\{\varrho'^2\left(\frac{\nu^2}{4\omega}\right)\right\}} \tag{7.2}$$

worin $\mathfrak{d} \cdot \nu$ ganz und zu $\mathfrak{b}_1$ teilerfremd ist.

Nun ist noch:

$$\frac{N(\mathfrak{a})}{N(2\mathfrak{a}_1)\sqrt{d}\sqrt{N(2\omega)}} = \sqrt{N(\mathfrak{a})}\,\frac{N(\mathfrak{a})\sqrt{N(2\mathfrak{b})}}{N(\mathfrak{a}_1)N(4\mathfrak{b})} = \sqrt{N(\mathfrak{a})}\,\frac{\sqrt{N(2\mathfrak{b})}}{N(\mathfrak{b}_1)}$$

wegen

$$\omega = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}, \qquad \frac{\mathfrak{a}}{4\mathfrak{b}} = \frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{b}_1}$$

Ferner ist

$$\sum_{\varrho' \bmod \mathfrak{b}_1} e^{-2\pi i S\left\{\varrho'^2\left(\frac{\nu^2}{4\omega}\right)\right\}}$$

selbst eine Gaußsche Summe, nämlich

$$\sum_{\varrho' \bmod. \mathfrak{b}_1} e^{-2\pi i S\left\{\varrho'^2\left(\frac{\nu^2}{4\omega}\right)\right\}} = C\left(-\frac{\nu^2}{4\omega}\right) \tag{7.3}$$

Wir finden also aus (7.1) (7.2) (7.3) die endgültige Reziprozitätsformel:

$$C(\omega) = \sqrt{N(\mathfrak{a})}\,\frac{\sqrt{N(2\mathfrak{b})}}{N(\mathfrak{b}_1)}\, e^{\frac{\pi i}{4} S(\operatorname{sgn}\omega)} \cdot C\left(-\frac{\nu^2}{4\omega}\right) \tag{7.4}$$

In (7.4) ist $\omega\mathfrak{d} = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$, $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = 1$; $4\omega\mathfrak{d} = \frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1}$, $(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{a}_1 = 1)$, und ν eine beliebige Körperzahl mit der Eigenschaft, daß $\nu \cdot \mathfrak{d}$ ganz und zu $\mathfrak{b}_1$ teilerfremd ist. Das Zeichen $S(\operatorname{sgn}\omega)$ bedeutet $\operatorname{sgn}\omega^{(1)} + \operatorname{sgn}\omega^{(2)}$.

Lebenslauf.

Als Sohn des Regierungsbaumeisters Albert Cramer und seiner Ehefrau Martha geb. Promnitz wurde ich, Wolfgang Cramer, am 18. Oktober 1901 zu Hamburg geboren. In Breslau besuchte ich zunächst das Gymnasium am Zwinger, dann bis zur Reifeprüfung 1920 die Bender-Oberrealschule.

Vom WS. 1920/21 bis zum WS. 1921/22 studierte ich in Breslau Philosophie bei Hoenigswald, Kühnemann, Lehmann und Marck. Im SS. 1922 hörte ich in Heidelberg Gundolf, Jaspers und Rickert.

Vom November 1922 an absolvierte ich die zweijährige Lehrzeit eines Bankangestellten bei der Schlesischen Landschaftlichen Bank zu Breslau.

Im WS. 1924/25 begann ich wieder in Breslau das Studium der Mathematik und Physik und setzte das der Philosophie und Psychologie fort.

Meine Arbeiten auf diesen Gebieten sind noch nicht beendet.

Ich hörte in dieser Zeit bei Hoenigswald, Hoheisel, Kneser, Loewi, Marck, Rademacher, Reiche und Schaefer.

Es sei mir erlaubt, meinen Lehrern hier zu danken. Ganz besonderen Dank schulde ich Herrn Professor Dr. Hans Rademacher, der mir auch die Anregung zu dieser Arbeit gab.

Breslau, Februar 1932.